CHAPITRE 0 : MATHS POUR LA PHYSIQUE

I. Mesures et incertitudes

1. Grandeurs physiques

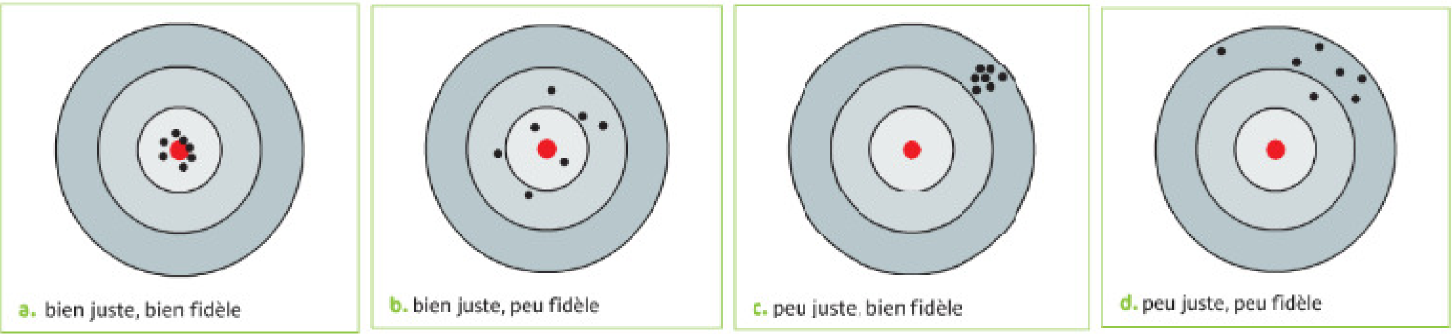
Une **grandeur** est utilisée en science pour caractériser un objet ou un événement (ex : masse, vitesse, force,…). NE PAS CONFONDRE AVEC LES **UNITES** !!! (ex : gramme, m.s^{-1}, Newton). Les grandeurs sont obtenues soit par la mesure avec des instruments adaptés, soit par le calcul à partir d'autres grandeurs.

Le système le plus utilisé pour les unités est appelé le **système international (SI)** et comporte 7 unités de base dont 6 seulement s'utilisent en TS : **mètre, kilogramme, seconde, ampère, mole, kelvin.** Toutes les autres unités pouvant s'exprimer comme une combinaison de ces unités de base.

2. Précision et incertitude

Qu'elles soient mesurées ou calculées, les valeurs des grandeurs ne sont connues qu'avec une précision limitée. La **valeur exacte** d'une grandeur n'est **pas accessible** ainsi que son erreur de mesure. On peut uniquement associer une incertitude de mesure à la valeur mesurée, c.-à-d. donner un encadrement dans lequel on estime que la valeur exacte se trouve.

La difficulté d'obtenir une valeur fiable d'une grandeur est analogue à celle que rencontre un tireur sur une cible. Elle est due soit à des **erreurs aléatoires** (fig b) où les résultats sont dispersés mais autour de la valeur exacte, soit à des **erreurs systématiques** (fig c) où les résultats sont voisins entre eux mais éloignés de la valeur exacte, soit aux deux à la fois (fig d).



a. bien juste, bien fidèle — b. bien juste, peu fidèle — c. peu juste, bien fidèle — d. peu juste, peu fidèle

a. Incertitude ou incertitude absolue

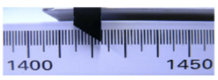
Elle s'utilise lorsqu'on exprime la valeur **x** d'une grandeur, qui peut être présentée comme une valeur estimée $x_{estimée}$ associée à son incertitude absolue Δx : $x = x_{estimée} \pm \Delta x$

Ceci revient à écrire pour x l'encadrement suivant qui définit l'intervalle de confiance de **x** :

$$x_{estimée} - \Delta x \leq x \leq x_{estimée} + \Delta x$$

Expl : Si U= 4,35 ± 0,03 V alors la tension U est comprise entre 4,32 V (4,35 - 0,03) et 4,38 V.
Elle est donnée la plupart du temps avec **un seul chiffre significatif** (CS).
Pour la calculer on peut avoir affaire à des formules (données en TS) :

- Sur une mesure unique : $U_{\text{lecture}} = \dfrac{2graduations}{\sqrt{12}}$ prise sur une échelle, un cadran, .. avec un niveau de confiance de 95%.



- Sur une double lecture : $U_{\text{dble lecture}} = \sqrt{2}\dfrac{2graduations}{\sqrt{12}}$ prise pour la distance lentille-écran d'un banc optique gradué au mm. A.N. : $U_{\text{dble lecture}} = \sqrt{2}\dfrac{2*1}{\sqrt{12}} = 0{,}82mm$
- Sur une mesure effectuée plusieurs fois (la répétition des mesures améliore la précision) on peut calculer l'écart-type : $\sigma_{n-1} = \sqrt{\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(mk-\overline{m})^2}{n-1}}$ avec $\overline{m}$=m$_{moy}$,∑=somme (addition) et n=nb de mesure et $\Delta x = \dfrac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$ est l'incertitude absolue associée.

b. Incertitude relative ou précision (valeur positive avec 1 seul CS)

Elle est notée $\frac{\Delta x}{x_{estimée}}$, et donne la précision d'une mesure : plus elle est petite plus la mesure est précise. Elle n'a pas d'unité et s'exprime souvent en % avec le plus souvent **un seul CS**.
Expl : Si on veut prélever 25mL avec une pipette précise à 0,05 mL près, on a alors l'incertitude relative : $\Delta V/V = 0{,}05/25 = 2.10^{-3}$ soit 0,2%. Si, en revanche, elle fait appel à plusieurs instruments ou grandeurs t.q. dans la relation : $CA = \frac{CB.VB}{VA}$ alors l'incertitude relative sur CA sera fonction de toutes les grandeurs et leurs incertitudes : $\frac{\Delta CA}{CA} = \sqrt{\left[\frac{(\Delta CB)}{CB}\right]^2 + \left[\frac{(\Delta VB)}{VB}\right]^2 + \left[\frac{(\Delta VA)}{VA}\right]^2}$

II. Analyse dimensionnelle

1. Méthode

Faire l'analyse dimensionnelle d'une relation consiste à remplacer, dans la relation, chaque lettre symbolisant une grandeur par la dimension (distance -> L) de cette grandeur sachant que **2 membres d'une équation** doivent avoir **même dimension** (L=L) et qu'une grandeur qui est égale au **quotient de 2 grandeurs de même dimension** n'a **pas de dimension (L/L=1)**.
Chacune des six unités de base vues précédemment (I.1.) a sa propre dimension, représentée symboliquement par une lettre majuscule.

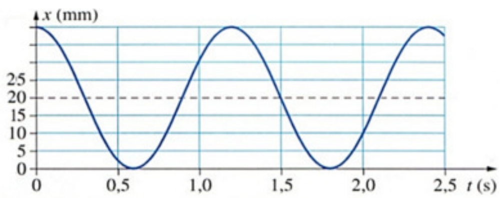
Grandeur	Longueur	Masse *(physique)*	Temps	Courant électrique	Température	Quantité de matière
Symbole de la dimension	**L**	**M**	**T**	**I**	**θ**	**N**
Unité SI	mètre(m)	kilogramme (kg)	seconde (s)	ampère (A)	kelvin (K)	mole (mol)

La dimension d'une grandeur G se note entre crochet [G] et peut s'exprimer à partir de ces 6 dimensions et d'**équations** de la physique qui doivent **être homogènes en unité**.
Rq :Les grandeurs **sans dimension : [dimension]=1** (densité, indice de réfraction,..) n'ont **pas d'unité**, à l'exception des angles qui sont sans dimension mais ont une unité, le radian (rad).

2. Applications

- Déterminer l'unité d'une grandeur : P=m.g alors $[P]=M.[g]=M.L.T^{-2}$ qui se lit «la grandeur P a la dimension d'une masse fois une distance divisée par un temps au carré». Et cette dimension correspond à l'unité d'une force, soit Newton=$kg.m.s^{-2}$ en terme d'unité.
- Vérifier l'homogénéité d'une relation : $n = \frac{\rho\, V}{M}$ sachant que la dimension de n est celle d'une quantité de matière et $M = \frac{m}{n}$ et $= \frac{m}{V}$, soit $\left[\frac{\rho\, V}{m}\right] = \frac{[\rho].[V]}{[m]} = \frac{\frac{M.[V]}{[V]}}{\frac{M}{N}} = \frac{\frac{M.L^3}{L^3}}{\frac{M}{N}} = N$ donc la dimension est bien celle d'une quantité de matière => Relation homogène.
- Trouver une relation : de la forme (par exple) $t = k.d^{\alpha}.g^{\beta}$. On cherche β et α (=nb). (Calcul).

III. Fonctions et dérivées



En mathématiques la fonction est souvent f de variable x.
En physique la fonction est plutôt la position x (ou y ou z) et la variable t (le temps). Et on utilise donc x(t).
Et la dérivée de la position x(t) est $x' = v_x(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ et sa dérivée seconde est $x'' = a_x(t) = \frac{dx^2}{dt^2}$.
Exple : $x(t) = a\frac{t^2}{2} + bt + k$, avec k une constante, alors $v_x(t) = \frac{2at}{2} + b = at + b$ et $a_x(t) = a$.

En revanche il existe un « inverse » à la fonction de dérivée, il s'agit de la primitive.
Une **primitive F** d'une fonction f est une **fonction dont la dérivée est f** : F'=f.
En effet une fonction peut être inconnue mais sa primitive connue. Pour déterminer la fonction, il faut alors rechercher une primitive de sa dérivée.

Exple : Les fonctions f qui vérifient f'(t)= at+b, où a et b sont des constantes, sont les fonctions de la forme f(t)= a $\frac{t^2}{2} + bt + k$ pour toute constante k. Et une solution particulière, pour laquelle la valeur de k est connue, peut être déterminée à l'aide d'un point particulier.

<u>En TS, seules des résolutions similaires à la suivante seront utilisées (on cherche la position) :</u>
Pour le mouvement d'un point matériel sur un axe (Ox). A l'issue d'un raisonnement utilisant les lois de Newton (chapitre 8), est établie l'égalité : $\frac{dx^2}{dt^2} = \boldsymbol{a} = \mathbf{3}$, avec a=3 une constante.
La détermination de x(t) peut être faite en deux étapes :

- Une première intégration (calcul de primitive) donne la valeur de la coordonnée de la vitesse sur l'axe en question : v = $\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{a}t + b = \mathbf{3}t + b$, avec 3 et b des constantes.

La **constante** b est à déterminer à l'aide des conditions initiales (à t=0) sur la vitesse :v_0=5.
A t=0 s cette vitesse est v(t=0)= 3*0+ b =**b= v_0=5**, alors cela donne : $\frac{dx}{dt} = 3t + \boldsymbol{v_0} = 3t + \mathbf{5}$.

- De même une deuxième intégration fournit : x(t)= 3 $\frac{t^2}{2} + v_0 t + c$, où c est une constante. On utilise les conditions initiales et on trouve c=x_0 qui est la position à t=0.

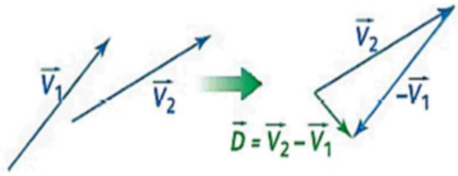
IV. La fonction logarithme décimal

La fonction logarithme décimal, notée **log(x)**,est définie sur l'intervalle]0 ; +∞[.
Elle est très utilisée en physique-chimie et possède des propriétés très proches de la fonction logarithme népérien ln (maths TS). Elle est t.q. : **y= log(x) ⇔ x=10^y**

Propriété	0<x<1 ⇔ y<0	x>1 ⇔ y>0	x est multiplié par 10 ⇔ **y** ↗ **de 1**	x est divisé par 10 ⇔ **y** ↘ **de 1**	**log(a.b)= log(a)+log(b)**	**log(a^c) = c. log(a)**	**log($\frac{a}{b}$) = log(a) - log(b)**
Exemple	log(0,1)= -1	10^1= 10	log(10x0,1)= log(1)= -1**+1** =0	$\frac{10^1}{10} = \frac{10^1}{10^1}$ $10^{1\mathbf{-1}}=10^0$			

V. Vecteurs

1. Généralités

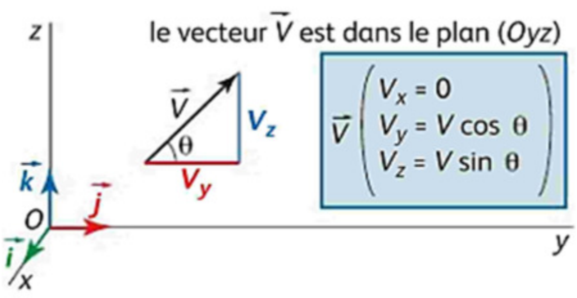


➢ Construction graphiques : Pour une somme de vecteurs on construit le 1er et on ajoute le 2ème à son extrémité et pour une différence $\vec{D}$ on construit le 1er ($\vec{V_2}$) et on ajoute - le 2ème à son extrémité (-$\vec{V_1}$).

➢ Coordonnées : Pour un vecteur $\vec{V}$ dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$)on a

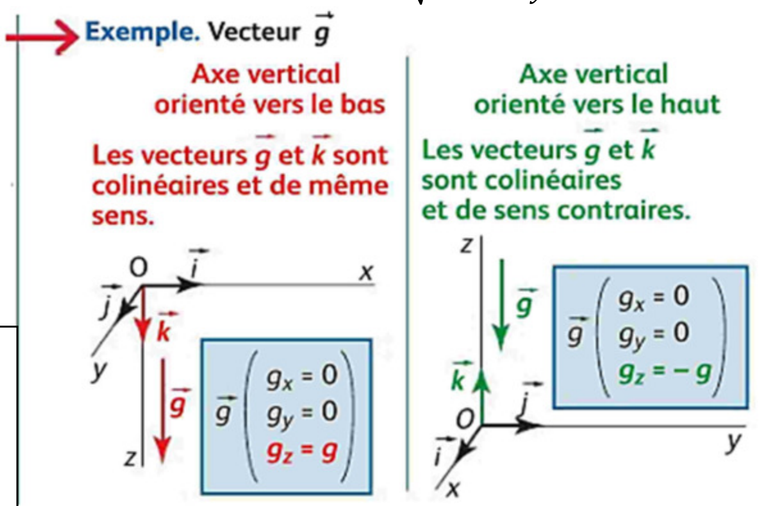
$$\vec{V} = V_x\,\vec{\imath},\ V_y\,\vec{\jmath},\ V_z\,\vec{k}$$

Pour les retrouver on calcule la différence de coordonnées de l'extrémité et de l'origine du vecteur ou on utilise l'angle θ et la norme du vecteur (v = $\|\vec{v}\|$=$\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$).

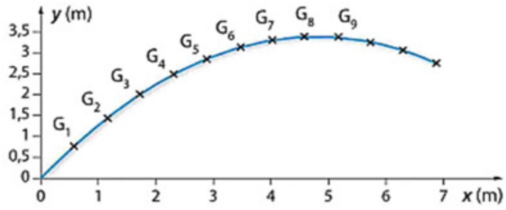


Car cos θ = $\frac{\text{côté adjacent}}{\text{côté hypotenuse}} = \frac{V_y}{V}$

Et sin θ = $\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté hypotenuse}} = \frac{V_z}{V}$



2. Application au tracé des vecteurs vitesse et accélération



La trajectoire de l'objet G en mouvement est tracée dans un repère orthonormé (O, x, y) et les positions successives de G sont séparées par une durée constante, notée τ, et sont écrites sur la trajectoire sous forme G_i ou $G(t_i)$ avec i un nombre t.q. i=0 initialement.
Rq : Les distances sont mesurées sur la trajectoire en tenant compte de l'échelle fournie.

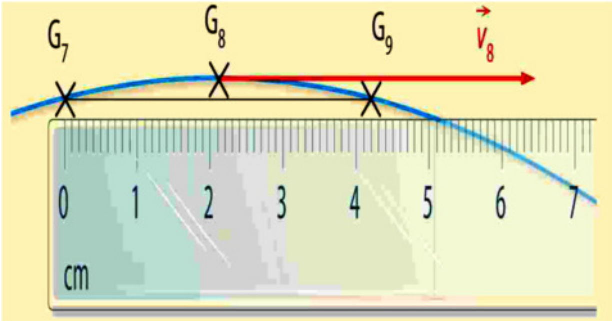
a. Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_i}$ au point G_i et sa norme v_i sont donnés par les relations :

$$\overrightarrow{v_i} = \frac{\overrightarrow{G_{i-1}G_{i+1}}}{t_{i+1}-t_{i-1}} = \frac{\overrightarrow{G_{i-1}G_{i+1}}}{2\tau} \; ; \qquad v_i = \frac{G_{i-1}G_{i+1}}{2\tau}$$

Le sens de $\overrightarrow{v_i}$ est celui du mouvement et sa direction tangente à la trajectoire, c'est-à-dire les même que $\overrightarrow{G_{i-1}G_{i+1}}$. Et $\overrightarrow{v_i}$ est tracé au point G_i.

<u>*Exemple :*</u> *Si on prend une échelle de 1 cm pour à 0,1 m.s^{-1} pour la vitesse et une durée entre chaque point de τ = 0,050 s. Pour tracer le vecteur $\overrightarrow{v_8}$ au point G_8 on calcul sa valeur.*
La distance mesurée (schéma) entre G_7 et G_9 est de 2,8 cm=G_7G_9. On applique la formule :
$v_8=\frac{G_7G_9}{2\,\tau}$ *d'où* $v_8=\frac{2,8.10^{-2}}{2*0,050}$ *= 2,8.10^{-1} m.s^{-1} (soit 2,8cm)*



b. Vecteur accélération

Le vecteur accélération $\overrightarrow{a_i}$ au point G_i et sa norme a_i sont donnés par les relations :

$$\overrightarrow{a_i} = \frac{\overrightarrow{v_{i+1}} - \overrightarrow{v_{i-1}}}{t_{i+1}-t_{i-1}} = \frac{\overrightarrow{\Delta v_i}}{2\tau} \; ; \qquad a_i = \frac{\Delta v_i}{2\tau}$$

Le sens et la direction de $\overrightarrow{a_i}$ sont ceux de $\overrightarrow{\Delta v_i}$ = $\overrightarrow{v_{i+1}} - \overrightarrow{v_{i-1}}$ et $\overrightarrow{a_i}$ est tracé au point G_i.
<u>*Exemple :*</u> *Si on prend échelle de 1 cm pour 5.10^{-3} m.s^{-2} pour l'accélération et toujours τ = 0,050 s.* Pour tracer $\overrightarrow{a_7}$ en G_7, on calcul sa valeur. Pour cela il faut représenter $\overrightarrow{v_6}$ *et* $\overrightarrow{v_8}$ *comme précédemment, puis, au point G_7, il faut construire le vecteur* $\overrightarrow{\Delta v_7}$ = $\overrightarrow{v_8} - \overrightarrow{v_6}$. La mesure de Δv_7 donne 1,5 cm,ce qui, avec l'échelle des vitesses précédente fait Δv_7=1,5.10^{-2} *0,1=1,5.10^{-3}m.s^{-1}

Et $a_7=\frac{\Delta v_7}{2\tau}$ d'où $a_7=\frac{1,5.10^{-3}}{2*0,050}$ = 1,5. 10^{-2} m.s^{-2} (soit 3 cm avec l'échelle).