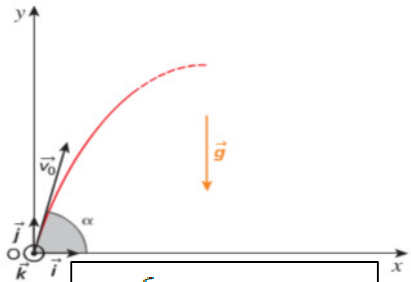
CHAPITRE 9 : APPLICATIONS DES LOIS DE LA MECANIQUE

I. Mouvements dans un champ uniforme

1. Mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme

a. Etude dynamique



L'étude du mouvement du projectile est réduite à celle de son centre d'inertie G et le mouvement est étudié dans un référentiel terrestre supposé galiléen et muni d'un repère cartésien (*Oxyz*).
Si on considère le lancer d'un projectile (ballon, ..) et qu'on applique le PFD (2ème loi de Newton), on a :

$$\Sigma\vec{F} = m.\vec{a} = \vec{P} = m.\vec{g} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{g}$$

On néglige alors l'action de l'air (poussée d'Archimède, frottements) par rapport au poids. Les coordonnée du vecteur vitesse initiale sont :

$$\vec{v}_o \begin{cases} v_{ox} = v_o \cos\alpha \\ v_{oy} = v_o \sin\alpha \\ v_{oz} = 0 \end{cases}$$

b. Détermination de la position

On utilise le PFD pour trouver l'expression de l'accélération ($\vec{a} = \vec{g}$) et on projette sur x et y :

$$\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{dv_x}{dt}(t) = 0 \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y}{dt}(t) = -g \\ a_z(t) = \dfrac{dv_z}{dt}(t) = 0 \end{cases}$$

Pour obtenir les trois coordonnées du vecteur vitesse, il suffit d'intégrer ces trois équations par rapport au temps (opération inverse de la dérivée). Il vient :

$$\begin{cases} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = -g \times t + C_2 \\ v_z(t) = C_3 \end{cases}$$

où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes d'intégration, que l'on peut déterminer à l'aide des conditions initiales (C.I.), et qui donnent :

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_o \begin{cases} v_x(0) = v_{ox} = v_o \cos\alpha = C_1 \\ v_y(0) = v_{oy} = v_o \sin\alpha = -g \times 0 + C_2 = C_2 \\ v_z(0) = v_{oz} = 0 = C_3 \end{cases} \text{, soit: } \begin{cases} v_x(t) = v_o \cos\alpha \\ v_y(t) = -g \times t + v_o \sin\alpha \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$

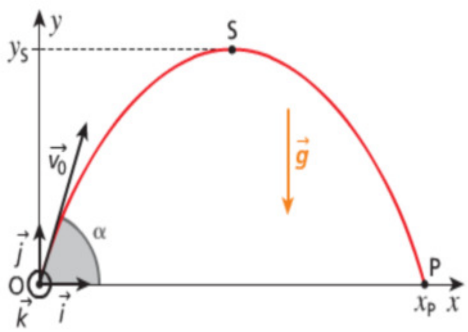
Les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG(t)}$ s'obtiennent par intégration sur le temps,

$$\overrightarrow{OG}(t) \begin{cases} x(t) = (v_o \cos\alpha) \times t + C_4 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g \times t^2 + (v_o \sin\alpha) \times t + C_5 \\ v_z(t) = C_6 \end{cases}$$

C_4, C_5 et C_6 sont des constantes d'intégration que l'on peut trouver à l'aide des C.I.: si G est initialement à l'origine O,alorsC_4=C_5=C_6=0 et :

$$\overrightarrow{OG}(t) \begin{cases} x(t) = (v_o \cos\alpha) \times t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g \times t^2 + (v_o \sin\alpha) \times t \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$

c. Caractéristiques de la trajectoire



- *La flèche :* Au **sommet** de la trajectoire S, la composante verticale de la vitesse s'annule : $v_y(t_S)=0$.
L'équation horaire ***x(t) = (v₀ cos α) t*** permet d'exprimer le temps, le sommet est donc atteint à la date : $t_S = \dfrac{v_o \sin\alpha}{g}$

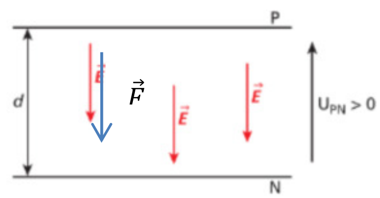
En remplaçant cette expression de t dans la 2ème équation horaire (y(t)), il vient :

$$y_S = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_o \sin\alpha}{g}\right)^2 + v_o \sin\alpha \frac{v_o \sin\alpha}{g}$$

$$y_S = \frac{1}{2} \frac{v_o^2 \sin^2\alpha}{g}$$

- *La portée* est l'abscisse x_P du point P pour lequel l'altitude est nulle : c'est la distance totale au sol parcourue par l'objet.

2. Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

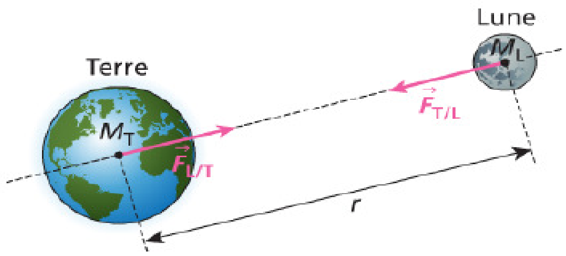


Un champ électrostatique E uniforme a même valeur, même direction et même sens en tout point de l'espace. $E = \dfrac{U_{PN}}{d}$ (En V.m^{-1} si U_{PN} est en volts et d en mètres).

Une particule chargée de masse m et de charge électrique q dans un champ électrostatique E se trouve également dans le champ de pesanteur. Elle subit donc deux forces, la force électrique $F = qE$ ($\approx 10^{-15} N$), le poids $P = mg$ ($\approx 10^{-29} N$). Donc on peut négliger le poids (P≈0).
D'où, par application du PFD : $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$

II. Mécanique céleste et mouvements satellitaires

1. Satellites en mouvement circulaire



D'après la troisième loi de Newton :

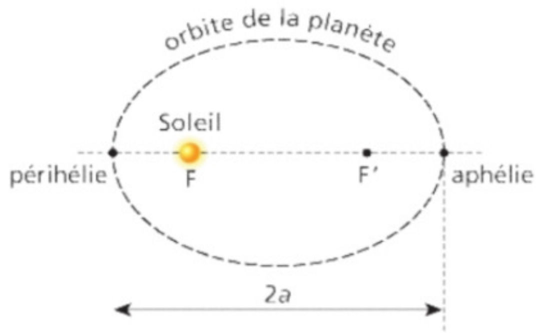
$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = -G\frac{m_A m_B}{r^2}\vec{u}_{AB}$$

Et d'après la 2ème loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{F}_{O/S} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_{OS}$
avec O le centre attracteur et S le satellite.

Donc l'accélération ne dépend que de la masse de l'astre attracteur et de la distance r.
Si on considère la période de révolution on a v=2πr/T (car la trajectoire est un cercle) où T est égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même pour un satellite géostationnaire.

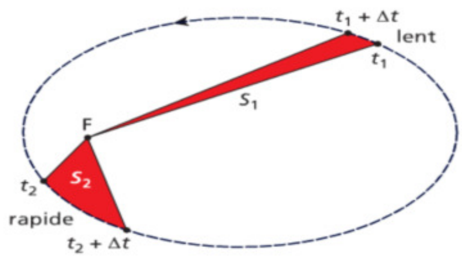
2. Première loi de Kepler : loi des orbites

Les planètes décrivent autour du Soleil des ellipses dont le Soleil est l'un des foyers.



La distance Soleil-planète n'est pas constante ; la position la plus proche du Soleil est le périhélie, la plus éloignée l'aphélie.
Une ellipse est une courbe fermée caractérisée par deux points F et F' appelés foyers, et par une distance a appelée demi-grand axe – le grand-axe étant le segment reliant périhélie et aphélie.
Dans le cas d'une ellipse très peu aplatie (de faible excentricité), l'orbite de la planète peut être considérée comme un cercle dont le Soleil est le centre : c'est le cas pour la plupart des planètes du système solaire, hormis Mars et Mercure.

3. Deuxième loi de Kepler : loi des aires



Le segment de droite (ou rayon vecteur) reliant le Soleil à la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

L'aire balayée est délimitée par l'arc de l'orbite parcouru par la planète et les deux segments de droite. Pour un même intervalle de temps Δt, ces aires sont égales pour n'importe quelle position de la planète sur son orbite.
Ainsi, plus la planète est proche du Soleil, et plus sa vitesse est élevée ; inversement, une planète va de moins en moins vite si elle s'éloigne du Soleil.
Remarque : Cette loi permet de montre qu'un mouvement circulaire est nécessairement uniforme.

4. Troisième loi de Kepler : loi des périodes

Le quotient du carré de la période de révolution T par le cube du demi-grand axe orbital a est le même pour toutes les planètes du système solaire. $\frac{T^2}{a^3} = cste$